Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 5, pp. 189-209. Pergamon Press 1962. Printed in Great Britain.

ZUR EXAKTEN LÖSUNG DER VOLLSTÄNDIGEN BEWEGUNGSGLEICHUNG UND DER ENERGIEGLEICHUNG FÜR DIE LAMINARE STRÖMUNG UM EBENE KEILKÖRPER

H. W. HAHNEMANN

Düsseldorf, Kleverstrasse 60

(*Received* 6 *October* 1961)

Zusammenfassung—Die exakte Lösung der vollständigen Bewegungsgleichung und der vollständigen Energiegleichung für die laminare Strömung um ebene Keilkörper gelingt mittels einer geeigneten Koordinatentransformation und Einführens von Reihenentwicklungen für die Stromfunktion und das Übertemperaturverhältnis. Für die einzelnen Glieder der Reihenentwicklungen ergeben sich totale Differentialgleichungen, von denen die für die ersten Glieder (erste Näherung) als die strengen Lösungen der Grenzschichtgleichungen bereits bekannt sind und die für die zweiten Glieder (zweite Näherung) am besten mit Hilfe von Rechenmaschinen numerisch ausgewertet werden. Als ein Teilergebnis sei erwähnt, daß das Ablösungsprofil nicht allein vom Keilwinkel, sondern auch von der Reynoldszahl abhängt.

1. EINLEITUNG

EINE jede Lösung irgendeines Strömungsproblems ist entweder eine exakte Lösung der Navier–Stokes'schen Differentialgleichungen, eine exakte Lösung der zuerst von Prandtl formulierten Prandtl'schen Grenzschichtgleichung oder eine Näherungslösung von einer dieser beiden grundlegenden Gleichungen. Kármán zeigte, dass die Grenzschichtgleichung als eine erste Näherung der vollständigen Navier–Stokes'schen Differentialgleichungen für grosse Reynoldszahlen angesehen werden kann. Auf Grund dieser Vorstellung gelang es Alden [1], eine zweite Näherung für die laminare Grenzschicht an der parallel angeströmten ebenen Platte zu berechnen. Hiernach entspricht die bekannte Lösung von Blasius [2] für die laminare Plattenströmung der ersten Näherung der vollständigen Bewegungsgleichungen unter Vernachlässigung der Änderungen des statischen Drucks, während die zweite Näherung von Alden diese Druckänderungen teilweise erfasst und daher für kleine Reynoldszahlen, d.h. im Bereich nahe der Plattenvorderkante, erheblich von der ersten Näherung abweicht.

Im folgenden soll diese zweite Näherung auf die Laminarströmung an ebenen Keilkörpern ausgedehnt werden, die durch eine bestimmte Klasse von Potentialgeschwindigkeitsprofilen mit einem Parameter gekennzeichnet sind und für die erste Näherungen von Hartree [3] vorliegen. Nach einem von Eckert [4] entwickelten Verfahren lässt sich die Strömung um einen beliebig geformten Körper aus dieser Klasse von Profilen aufbauen, indem man ihren Parameter in geeigneter Weise längs der Körperkontur ändert, die Körperumströmung also sukzessiv aus Keilströmungen zusammensetzt. Die angestrebte zweite Näherung kann insbesondere neue Erkenntnisse über den Ablösungspunkt sowie über das Verhalten der Strömung bei Reynoldszahlen unter etwa 200 bringen, wie sie z.B. bei manchen Wärmeübertragungsproblemen, beim Fliessen verdünnter Gase in der Nähe der Schlupfgrenze oder beim Umströmen feiner Feststoffteilchen u.a. in Staubseparatoren oder in Filteranlagen vorkommen. Leider gelingt die numerische Auswertung der aufgestellten Endgleichungen in den meisten Fällen nur mit Hilfe von Iterationsverfahren, so dass zum Überdecken eines genügend grossen Bereiches des massgeblichen Profilparameters ein grosser Aufwand nötig ist. Als am geeignetsten erscheinen Relaxationsverfahren oder der Einsatz von Rechenautomaten. Hier wird daher nur die Theorie mitgeteilt; es wäre zu wünschen, dass ein Rechenzentrum die numerische Auswertung in das Programm aufnähme.

2. DIE GRUNDGLEICHUNGEN

Für die laminare, inkompressible, isotherme und stetige ebene Strömung gelten bei Abwesenheit äusserer Kräfte die Bewegungsgleichungen

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{3}$$

und die Energiegleichung

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right). \tag{4}$$

Obwohl Gl. (1) bis (4) für rechtwinklige kartesische Koordinaten gelten, sei in der üblichen Weise vorausgesetzt, dass sie auch für Körper mit gekrümmten Oberflächen zutreffen. Dabei bedeuten x den längs der Körperkontur gemessenen Abstand vom vorderen Staupunkt, y den senkrechten Abstand von der Oberfläche, u und v die örtlichen Geschwindigkeitskomponenten in x- und in y-Richtung, p den örtlichen statischen Druck, t die örtliche Temperatur sowie ρ die Dichte, η die dynamische Viskosität und $a=\lambda/\rho c_p$ die Temperaturleitzahl des strömenden Mittels mit λ als seiner Wärmeleitzahl und c_p als seiner spezifischen Wärme bei konstantem Druck p. Während das Verhalten der Strömungsgrenzschicht wesentlich von der kinematischen Viskosität $\nu=\eta/\rho$ abhängt, wird die Energieübertragung von der Prandtlzahl $Pr=\nu/a$ beherrscht.

Mittels einer Stromfunktion ψ gemäss

$$u=\partial\psi/\partial y,\quad v=-\partial\psi/\partial x \tag{5}$$

kann man Gl. (3) befriedigen sowie Gl. (1), (2) und (4) auf die beiden Beziehungen

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\psi)-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\psi)=\nu\Delta\Delta\psi \tag{6}$$

und

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial y}=a\Delta t \tag{7}$$

mit den Abkürzungen

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \Delta\Delta=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

reduzieren. Bei der weiteren Rechnung sei von Gl. (6) und (7) ausgegangen. Dabei entspricht Gl. (6) den vollständigen Navier–Stokes'schen Differentialgleichungen für das hier behandelte Problem und enthält die der Prandtl'schen Grenzschichtgleichung zugrunde liegenden Vereinfachungen nicht.

3. DIE KOORDINATENTRANSFORMATION

Mit Hilfe einer konformen Abbildung gemäss

$$z = x + iy = re^{i\theta} = \zeta^{2/(m+1)} = (\sigma + i\tau)^{2/(m+1)} \tag{8}$$

seien an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten x, y neue Koordinaten σ, τ eingeführt. Dabei bedeuten i die imaginäre Einheit, $z = x + iy$ die komplexe Veränderliche mit r und θ als den Polarkoordinaten in der komplexen z-Ebene, $\zeta = \sigma + i\tau$ die transformierte komplexe Veränderliche und m eine willkürliche Konstante. Der Sonderfall $m = 0$ entspricht dem von Alden gelösten Fall der parallel angeströmten Platte mit σ und τ als parabolischen Koordinaten.

Aus Gl. (8) lässt sich eine Reihe von Beziehungen herleiten, die später benötigt und daher hier zusammengestellt werden:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{(x^2 + y^2)}, \quad \theta = \operatorname{arctg}(y/x), \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma &= r^{(m+1)/2}\cos\left(\frac{m+1}{2}\theta\right) = [\sqrt{(x^2+y^2)}]^{(m+1)/2}\cos\left[\frac{m+1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right],\\
\tau &= r^{(m+1)/2}\sin\left(\frac{m+1}{2}\theta\right) = [\sqrt{(x^2+y^2)}]^{(m+1)/2}\sin\left[\frac{m+1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right],
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}
r &= (\sigma^2 + \tau^2)^{1/(m+1)}, \quad \theta = \frac{2}{m+1}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right),\\
x &= (\sigma^2 + \tau^2)^{1/(m+1)}\cos\left[\frac{2}{m+1}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right],\\
y &= (\sigma^2 + \tau^2)^{1/(m+1)}\sin\left[\frac{2}{m+1}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right],
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \frac{\partial\tau}{\partial y}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial y} = -\frac{\partial\tau}{\partial x}, \tag{12}$$

$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2\right]} = \frac{m+1}{2}r^{(m-1)/2} = \frac{m+1}{2}(\sigma^2+\tau^2)^{(m-1)/2(m+1)} = M \tag{13}$$

mit M als einer Abkürzung für $|d\zeta/dz|$,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial\sigma} &= \frac{2}{m+1}(\sigma^2+\tau^2)^{-m/(m+1)}\left\{\sigma\cos\left[\frac{2}{m+1}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right] + \tau\sin\left[\frac{2}{m+1}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right]\right\},\\
\frac{\partial y}{\partial\sigma} &= \frac{2}{m+1}(\sigma^2+\tau^2)^{-m/(m+1)}\left\{\sigma\sin\left[\frac{2}{m+1}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right] - \tau\cos\left[\frac{2}{m+1}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right]\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial x} &= \frac{m+1}{2}\,[\sqrt{(x^2+y^2)}]^{(m-3)/2}\left\{x\cos\left[\frac{m+1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]+y\sin\left[\frac{m+1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]\right\}\\ &= \frac{m+1}{2}\,[\sqrt{(\sigma^2+\tau^2)}]^{(m-1)/(m+1)}\left\{\cos\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right]\cos\left[\frac{2}{m+1}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right]\right.\\ &\quad\left.+\sin\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right]\sin\left[\frac{2}{m+1}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right]\right\}\\ &= \frac{m+1}{2}\,[\sqrt{(\sigma^2+\tau^2)}]^{(m-1)/(m+1)}\cos\left[\frac{1-m}{1+m}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right],\\ \frac{\partial\sigma}{\partial y} &= \frac{m+1}{2}\,[\sqrt{(x^2+y^2)}]^{(m-3)/2}\left\{y\cos\left[\frac{m+1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]-x\sin\left[\frac{m+1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]\right\}\\ &= \frac{m+1}{2}\,[\sqrt{(\sigma^2+\tau^2)}]^{(m-1)/(m+1)}\sin\left[\frac{1-m}{1+m}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right].\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Da, wie aus Gl. (12) hervorgeht, ζ eine analytische Funktion von z ist, gehen Gl. (6) und (7) in

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\sigma}(M^2\Delta\psi)-\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial\tau}(M^2\Delta\psi)=\nu\Delta(M^2\Delta\psi)\quad(16)$$

und

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma}-\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}=a\Delta\vartheta\quad(17)$$

mit M als der Abkürzung gemäss Gl. (13) über. Ferner bedeuten ϑ das Übertemperaturverhältnis

$$\vartheta=(t-t_0)/(t_w-t_0)\quad(18)$$

mit den Indizes 0 und w für Werte im ungestörten Freistrom bzw. an der Wand sowie das Symbol Δ nunmehr den Operator

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}.$$

Man gelangt zu Gl. (16) und (17) leicht, wenn man in Gl. (6) und (7) die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x},\quad\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial y}$$

einführt und dabei Gl. (12) und (13) beachtet. Nach dem teilweisen Ausführen der partiellen Ableitungen und Multiplizieren beider Seiten mit dem Faktor $[2/(m+1)]^2\,(\sigma^2+\tau^2)^{2/(m+1)}$ nimmt Gl. (16) die leichter zu handhabende Form

$$\left.\begin{aligned}&(\sigma^2+\tau^2)\left[\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\sigma}(\Delta\psi)-\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial\tau}(\Delta\psi)\right]+2\,\frac{m-1}{m+1}\Delta\psi\left(\sigma\frac{\partial\psi}{\partial\tau}-\tau\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)\\ &\quad=\nu\left\{4\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2\Delta\psi+4\left(\frac{m-1}{m+1}\right)\left[\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}(\Delta\psi)+\tau\frac{\partial}{\partial\tau}(\Delta\psi)\right]+(\sigma^2+\tau^2)\,\Delta\Delta\psi\right\}\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

an. Bei diesem Stand der Rechnung muss man sich an Hand von Gl. (10) vergegenwärtigen, dass die neuen Koordinaten σ und τ für sehr dünne Grenzschichten mit $y \to 0$, also für $\theta \to 0$, $r \to x$ und

$$\sin\left(\frac{m+1}{2}\theta\right) \to \frac{m+1}{2}\frac{y}{x}$$

angenähert durch

$$\sigma \approx x^{(m+1)/2}, \quad \tau \approx \frac{m+1}{2} y x^{(m-1)/2} \tag{19a}$$

wiedergegeben werden. Dies bedeutet, dass die Koordinaten σ und τ bei dünnen Grenzschichten um Grössenordnungen voneinander verschieden sind. Aus diesem Grunde sei die Rechnung mit den neuen, besser vergleichbaren Koordinaten σ und $\mu = \tau/\nu^{1/2}$ weitergeführt. Dabei gilt

$$\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\tau = \nu^{-1/2}. \tag{20}$$

4. EINFÜHRUNG VON REIHENENTWICKLUNGEN FÜR DIE STROMFUNKTION UND DAS ÜBERTEMPERATURVERHÄLTNIS

Für die Stromfunktion ψ und das Übertemperaturverhältnis ϑ seien nun Reihenentwicklungen gemäss

$$\psi = \psi_1(\sigma, \mu)\nu^{1/2} + \psi_2(\sigma, \mu)\nu^{3/2} + \psi_3(\sigma, \mu)\nu^{5/2} + \ldots \tag{21}$$

mit steigenden Potenzen von $\nu^{1/2}$ sowie

$$\vartheta = 1 - [\vartheta_1(\sigma, \mu) + \vartheta_2(\sigma, \mu)\nu + \vartheta_3(\sigma, \mu)\nu^2 + \ldots] \tag{22}$$

mit steigenden Potenzen von ν eingeführt. Dabei bedeuten die Indizes 1, 2, 3, ... an ψ und ϑ auf den rechten Seiten von Gl. (21) und (22) die erste, die zweite, die dritte Näherung usw. Bildet man die Ableitungen

$$\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = \nu^{1/2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma} + \nu^{3/2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\sigma} + \ldots,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi_1}{\partial\mu} + \nu\frac{\partial\psi_2}{\partial\mu} + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2} = \nu^{1/2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\sigma^2} + \nu^{3/2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\sigma^2} + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} = \nu^{-1/2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\mu^2} + \nu^{1/2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\mu^2} + \ldots,$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

sowie

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma} = -\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\sigma} - \nu\,\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\sigma} - \ldots,$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = -\nu^{-1/2}\,\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\mu} - \nu^{1/2}\,\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\mu} - \ldots$$

und setzt diese in Gl. (19) und (17) ein, so erhält die Bewegungsgleichung die Form

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\sigma^2\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu} + \nu\left(\sigma^2\frac{\partial\psi_2}{\partial\mu} + \mu^2\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu}\right) + \nu^2\left(\sigma^2\frac{\partial\psi_3}{\partial\mu} + \mu^2\frac{\partial\psi_2}{\partial\mu}\right) + \ldots\right]\\
&\times\left[\nu^{-1/2}\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\sigma\partial\mu^2} + \nu^{1/2}\left(\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\sigma^3} + \frac{\partial^3\psi_2}{\partial\sigma\partial\mu^2}\right) + \nu^{3/2}\left(\frac{\partial^3\psi_2}{\partial\sigma^3} + \frac{\partial^3\psi_3}{\partial\sigma\partial\mu^2}\right) + \ldots\right]\\
&-\left[\nu^{1/2}\sigma^2\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma} + \nu^{3/2}\left(\sigma^2\frac{\partial\psi_2}{\partial\sigma} + \mu^2\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\right) + \nu^{5/2}\left(\sigma^2\frac{\partial\psi_3}{\partial\sigma} + \mu^2\frac{\partial\psi_2}{\partial\sigma}\right) + \ldots\right]\\
&\times\left[\nu^{-1}\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\mu^3} + \left(\frac{\partial^3\psi_2}{\partial\mu^3} + \frac{\partial^3\psi_1}{\partial\mu\partial\sigma^2}\right) + \nu\left(\frac{\partial^3\psi_3}{\partial\mu^3} + \frac{\partial^3\psi_2}{\partial\mu\partial\sigma^2}\right) + \ldots\right]\\
&+\left[\sigma\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu} + \nu\left(\sigma\frac{\partial\psi_2}{\partial\mu} - \mu\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\right) + \nu^2\left(\sigma\frac{\partial\psi_3}{\partial\mu} - \mu\frac{\partial\psi_2}{\partial\sigma}\right) + \ldots\right]\\
&\times\left\{2\,\frac{m-1}{m+1}\left[\nu^{-1/2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\mu^2} + \nu^{1/2}\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial\sigma^2}\right) + \nu^{3/2}\left(\frac{\partial^2\psi_3}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial\sigma^2}\right) + \ldots\right]\right\}\\
&= 4\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2\left[\nu^{1/2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\mu^2} + \nu^{3/2}\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial\sigma^2}\right) + \nu^{5/2}\left(\frac{\partial^2\psi_3}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial\sigma^2}\right) + \ldots\right]\\
&+ 4\,\frac{m-1}{m+1}\left[\nu^{1/2}\left(\mu\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\mu^3} + \sigma\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\sigma\partial\mu^2}\right) + \nu^{3/2}\left(\mu\frac{\partial^3\psi_2}{\partial\mu^3} + \sigma\frac{\partial^3\psi_2}{\partial\sigma\partial\mu^2}\right.\right.\\
&\left.\left.+\mu\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\mu\partial\sigma^2} + \sigma\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\sigma^3}\right) + \nu^{5/2}\left(\mu\frac{\partial^3\psi_3}{\partial\mu^3} + \sigma\frac{\partial^3\psi_3}{\partial\sigma\partial\mu^2} + \mu\frac{\partial^3\psi_2}{\partial\mu\partial\sigma^2} + \sigma\frac{\partial^3\psi_2}{\partial\sigma^3}\right) + \ldots\right]\\
&+ (\nu\sigma^2 + \nu^2\mu^2)\left[\nu^{-3/2}\frac{\partial^4\psi_1}{\partial\mu^4} + \nu^{-1/2}\left(\frac{\partial^4\psi_2}{\partial\mu^4} + 2\,\frac{\partial^4\psi_1}{\partial\sigma^2\partial\mu^2}\right)\right.\\
&\left.+\nu^{1/2}\left(\frac{\partial^4\psi_3}{\partial\mu^4} + 2\,\frac{\partial^4\psi_2}{\partial\sigma^2\partial\mu^2} + \frac{\partial^4\psi_1}{\partial\sigma^4}\right) + \ldots\right]
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

und die Energiegleichung die Form

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu} + \nu\,\frac{\partial\psi_2}{\partial\mu} + \nu^2\,\frac{\partial\psi_3}{\partial\mu} + \ldots\right)\left(-\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\sigma} - \nu\,\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\sigma} - \nu^2\,\frac{\partial\vartheta_3}{\partial\sigma} - \ldots\right)\\
&+\left(\nu^{1/2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma} + \nu^{3/2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\sigma} + \nu^{5/2}\frac{\partial\psi_3}{\partial\sigma} + \ldots\right)\left(\nu^{-1/2}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\mu} + \nu^{1/2}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\mu} + \nu^{3/2}\frac{\partial\vartheta_3}{\partial\mu} + \ldots\right)\\
&= -\frac{\nu}{Pr}\left(\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial\sigma^2} + \nu\,\frac{\partial^2\vartheta_2}{\partial\sigma^2} + \nu^2\,\frac{\partial^2\vartheta_3}{\partial\sigma^2} + \ldots + \nu^{-1}\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2\vartheta_2}{\partial\mu^2} + \nu\,\frac{\partial^2\vartheta_3}{\partial\mu^2} + \ldots\right).
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

5. DIE VOLLSTÄNDIGEN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN FÜR DIE ERSTE UND DIE ZWEITE NÄHERUNG

Wenn man Gl. (23) und (24) jeweils rechts und links nach Potenzen von ν ordnet, so ergeben sich durch Koeffizientenvergleich Bestimmungsgleichungen für die einzelnen Näherungen $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \cdots$ und $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \cdots$.

Wegen des grossen Rechenaufwandes für die dritten und höheren Näherungen werden im folgenden nur die beiden ersten Näherungen ψ_1, ϑ_1 und ψ_2, ϑ_2 weiter behandelt. Der Koeffizientenvergleich liefert für die Glieder mit $\nu^{-1/2}$ in Gl. (23) und für die Glieder mit ν^0 in Gl. (24) das Gleichungssystem

$$\sigma^2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu}\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\sigma\partial\mu^2}-\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\mu^3}\right)+2\frac{m-1}{m+1}\sigma\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\mu^2}=\sigma^2\frac{\partial^4\psi_1}{\partial\mu^4}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\mu}-\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\sigma}=-\frac{1}{Pr}\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial\mu^2} \tag{26}$$

für ψ_1 und ϑ_1. Entsprechend führt der Koeffizientenvergleich für die Glieder mit $\nu^{1/2}$ in Gl. (23) und für die Glieder mit ν in Gl. (24) auf das System

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma^2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu}\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\sigma^3}+\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu}\frac{\partial^3\psi_2}{\partial\sigma\partial\mu^2}+\frac{\partial\psi_2}{\partial\mu}\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\sigma\partial\mu^2}-\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\frac{\partial^3\psi_2}{\partial\mu^3}\right.\\
&\quad\left.-\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\mu\partial\sigma^2}-\frac{\partial\psi_2}{\partial\sigma}\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\mu^3}\right)+\mu^2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu}\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\sigma\partial\mu^2}-\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\mu^3}\right)\\
&\quad+2\frac{m-1}{m+1}\left[\sigma\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\mu^2}+\frac{\partial\psi_2}{\partial\mu}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\mu^2}\right)-\mu\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\mu^2}\right]\\
&\quad=4\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\mu^2}+4\frac{m-1}{m+1}\left(\mu\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\mu^3}+\sigma\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\sigma\partial\mu^2}\right)\\
&\quad+\sigma^2\left(\frac{\partial^4\psi_2}{\partial\mu^4}+2\frac{\partial^4\psi_1}{\partial\sigma^2\partial\mu^2}\right)+\mu^2\frac{\partial^4\psi_1}{\partial\mu^4},
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\mu}+\frac{\partial\psi_2}{\partial\sigma}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\mu}-\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\sigma}-\frac{\partial\psi_2}{\partial\mu}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\sigma}=-\frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial^2\vartheta_2}{\partial\mu^2}\right) \tag{28}$$

für ψ_2 und ϑ_2.

6. DIE VOLLSTÄNDIGEN TOTALEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN FÜR DIE ERSTE UND DIE ZWEITE NÄHERUNG

Mit dem Ziele, die partiellen Systeme gemäss Gl. (25) bis (28) in totale Differentialgleichungen zu verwandeln, seien mit u_1 als einem noch unbekannten Parameter eine neue, dimensionslose Koordinate ξ entsprechend

$$\xi=\sqrt{\left(\frac{2}{m+1}\right)}\sqrt{(u_1)}\mu=\sqrt{\left(\frac{2}{m+1}\right)}\sqrt{\left(\frac{u_1}{\nu}\right)}\tau,\ \frac{\partial\xi}{\partial\mu}=\sqrt{\left(\frac{2}{m+1}\right)}\sqrt{(u_1)} \tag{29}$$

sowie für ψ und ϑ mit Hilfe unbekannter Funktionen $f_1(\xi), f_2(\xi), f_3(\xi), \cdots$ und $g_1(\xi), g_2(\xi), g_3(\xi), \cdots$ die Reihenansätze

$$\psi = \sigma\sqrt{\left(\frac{2}{m+1}\right)}\sqrt{(u_1\nu)}\left[f_1(\xi) + \frac{\nu}{[2/(m+1)]u_1\sigma^2}f_2(\xi) + \left(\frac{\nu}{[2/(m+1)]u_1\sigma^2}\right)^2 f_3(\xi) + \cdots\right] \quad (30)$$

und

$$\vartheta = 1 - \left[g_1(\xi) + \frac{\nu}{[2/(m+1)]u_1\sigma^2}g_2(\xi) + \left(\frac{\nu}{[2/(m+1)]u_1\sigma^2}\right)^2 g_3(\xi) + \cdots\right] \quad (31)$$

eingeführt. Nach Gl. (21) und (22) gilt also mit n als dem Index für eine beliebige Näherung

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \sqrt{\left(\frac{2}{m+1}\right)}\sqrt{(u_1)}\sigma f_1,\ \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{[2/(m+1)]}\sqrt{(u_1)}\sigma}f_2, \cdots, \\ \psi_n &= \frac{1}{\{\sqrt{[2/(m+1)]}\sqrt{(u_1)}\sigma\}^{2n-3}}f_n, \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

$$\vartheta_1 = g_1,\ \vartheta_2 = \frac{1}{[2/(m+1)]u_1\sigma^2}g_2, \cdots, \vartheta_n = \frac{1}{\{[2/(m+1)]u_1\sigma^2\}^{n-1}}g_n. \quad (33)$$

Da τ nach Gl. (10) die Dimension einer Länge in der $\frac{1}{2}(m+1)$-ten Potenz hat, muss u_1 das Verhältnis aus einer Bezugsgeschwindigkeit zu einer Bezugslänge in der m-ten Potenz darstellen, wenn ξ nach Gl. (29) dimensionslos sein soll. Bei Beschränkung wieder auf die ersten beiden Näherungen erhält man nach dem Einführen von Gl. (30) bis (33) in Gl. (25) bis (28) die totalen Differentialgleichungen

$$f_1'''' + f_1 f_1''' + \frac{1-3m}{1+m}f_1' f_1'' = 0 \quad (34)$$

zum Bestimmen von f_1,

$$\left.\begin{aligned} & f_2'''' + f_1 f_2''' + \left(1 - 2\frac{m-1}{m+1}\right)f_1' f_2'' - \left(1 + 2\frac{m-1}{m+1}\right)f_1'' f_2' - f_1''' f_2 \\ & = -\xi^2(f_1'''' + f_1 f_1''' - f_1' f_1'') - 2\frac{m-1}{m+1}\xi(2f_1''' + f_1 f_1'') \\ & \quad - 4\frac{m-1}{m+1}\frac{2m}{m+1}f_1'' \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

zum Bestimmen von f_2 bei nunmehr bekanntem f_1,

$$g_1'' + Prf_1 g_1' = 0 \quad (36)$$

zum Bestimmen von g_1 sowie

$$g_2'' + Pr(f_1 g_2' + 2f_1' g_2) - Prf_2 g_1' = 0 \quad (37)$$

zum Bestimmen von g_2. Dabei bedeuten die hochgestellten Striche Ableitungen nach ξ.

7. RANDBEDINGUNGEN UND BEDEUTUNG DER PARAMETER

Zum Auflösen des Differentialgleichungssystems gemäss Gl. (34) bis (37) benötigt man vier Randbedingungen für jede Funktion f_n und zwei Randbedingungen für jede Funktion g_n. Die Randbedingungen für das Temperaturfeld folgen sofort aus Gl. (18) und (31); denn an der Wand ($y = \tau = \mu = \xi = 0$) muss $\vartheta = 1$ und somit

$$g_1(0) = g_2(0) = \cdots = g_n(0) = 0 \tag{38}$$

bzw. am Aussenrand der Grenzschicht ($y = \tau = \mu = \xi = \infty$ oder auch $r = \sigma = \infty$) muss $\vartheta = 0$ und somit

$$g_1(\infty) = 1, \quad g_2(\infty) = g_3(\infty) = \cdots = g_n(\infty) = 0 \tag{39}$$

sein.

Viel schwieriger lassen sich die Randbedingungen für das Strömungsfeld angeben. Hier liefern die Differentialgleichungen selbst nur drei verschiedene, brauchbare Bedingungen. Eine wichtige Ausgangsgrösse bei der numerischen Auswertung muss daher durch Probieren gefunden werden, welcher Umstand die Rechnung so mühsam macht, dass nur Relaxationsverfahren oder der Einsatz von Rechenmaschinen einen Erfolg mit tragbarem Aufwand versprechen. Es folgt aus Gl. (20), (29) und (30)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} &= \sqrt{\left(\frac{2}{m+1}\right)}\,\sqrt{(u_1\nu)}\left(f_1 - \frac{\nu}{[2/(m+1)]u_1\sigma^2} f_2 - \cdots\right), \\ \frac{\partial\psi}{\partial\tau} &= \frac{2}{m+1}\,u_1\sigma\left(f_1' + \frac{\nu}{[2/(m+1)]u_1\sigma^2} f_2' + \cdots\right) \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

sowie aus Gl. (5) und (12)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} &= \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\sigma} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\sigma} = u\frac{\partial y}{\partial\sigma} - v\frac{\partial x}{\partial\sigma}, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\tau} &= \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\tau} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\tau} = u\frac{\partial x}{\partial\sigma} + v\frac{\partial y}{\partial\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

An der Wand ($y = \tau = \mu = \xi = 0$) gilt $u = v = 0$. Ferner liefert Gl. (14) für $\tau = 0$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right)_{\tau=0} = \frac{2}{m+1}\,\sigma^{(1-m)/(1+m)}, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial\sigma}\right)_{\tau=0} = 0. \tag{42}$$

Aus Gl. (41) und (42) folgt

$$(\partial\psi/\partial\sigma)_{\tau=0} = (\partial\psi/\partial\tau)_{\tau=0} = 0 \tag{43}$$

und somit als Gruppe der ersten beiden Randbedingungen für die Stromfunktion

$$f_1(0) = f_2(0) = \cdots = f_n(0) = 0, \quad f_1'(0) = f_2'(0) = \cdots = f_n'(0) = 0. \tag{44}$$

Am Aussenrand der Grenzschicht ($r = \sigma = \infty$) sei $v = 0$ und $u = U$ mit U als der ungestörten Potentialgeschwindigkeit. Hierfür liefern Gl. (40)

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)_{\sigma=\infty} = \frac{2}{m+1}\,u_1\sigma\left[f_1'(\infty) + \frac{\nu}{[2/(m+1)]\,u_1\sigma^2}\,f_2'(\infty) + \cdots\right] \tag{45}$$

und Gl. (14)

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=\infty} &= \frac{2}{m+1}\,\sigma(\sigma^2+\tau^2)^{-m/(m+1)}\cos(k_1\pi),\\ \left(\frac{\partial y}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=\infty} &= -\frac{2}{m+1}\,\tau(\sigma^2+\tau^2)^{-m/(m+1)}\cos(k_2\pi).\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Dabei durchlaufen die Faktoren k_1 und k_2 die ganzen Zahlen 0, 1, 2, $\cdots$. Man kann sofort $k_1 = 0$ festlegen; der Wert von k_2 folgt dann aus der Bedingung für das richtige Vorzeichen. Aus einer Betrachtung des Sonderfalls $m = 0$ geht hervor, dass $k_2 = 1$ die Vorzeichenbedingung erfüllt. Nun ergibt sich aus Gl. (41) und (46)

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)_{\sigma=\infty} = U\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=\infty}\left[1 + \frac{v}{U}\left(\frac{\partial y/\partial\sigma}{\partial x/\partial\sigma}\right)_{\sigma=\infty}\right] = \frac{2}{m+1}\,U\sigma^{(1-m)/(1+m)} \tag{47}$$

und in Verbindung mit Gl. (45)

$$u_1\sigma\left[f_1'(\infty) + \frac{\nu}{[2/(m+1)]u_1\sigma^2}\,f_2'(\infty) + \cdots\right] = U\sigma^{(1-m)/(1+m)}. \tag{48}$$

Damit Gl. (48) erfüllt ist, sei

$$U = u_1\sigma^{\beta} \tag{49}$$

mit

$$\beta = 2m/(1+m)$$

gewählt. Für beliebige β-Werte sind dann die Randbedingungen

$$f_1'(\infty) = 1,\ f_2'(\infty) = f_3'(\infty) = \cdots = f_n'(\infty) = 0. \tag{50}$$

Eine analoge Betrachtung von $(\partial\psi/\partial\sigma)_{\tau=\infty}$ führt zu dem gleichen Ergebnis. Dies bedeutet aber, wie bereits erwähnt wurde, dass eine Randbedingung offen bleibt, die Lösung des Problems also durch Probieren aufzusuchen ist, indem man z.B. Reihenentwicklungen für den Innenrand der Grenzschicht in geeigneter Weise mit asymptotischen Lösungen für den Aussenrand der Grenzschicht zusammenschliesst. Aus Gl. (50) folgt

$$f_1(\infty) = \xi + c_1,\quad f_2(\infty) = K_1,\quad f_3(\infty) = K_2, \cdots \tag{51}$$

mit c_1, K_1, K_2, $\cdots$ als den unbekannten Integrationskonstanten. Durch die Wahl von $K_1 = K_2 = \cdots = 0$ werden die zunächst unbekannten Anfangswerte $f_2''(0)$, $f_3''(0)$, $\cdots$ festgelegt.

Aus Gl. (49) folgt mit Gl. (10) für $r = \sigma = \infty$

$$U = u_1 r^m\left[\cos\left(\frac{m+1}{2}\theta\right)\right]^{\beta}_{r=\infty} \rightarrow u_1 x^m = u_1 x^{\beta/(2-\beta)}. \tag{52}$$

Da U die Potentialgeschwindigkeit ausserhalb der Grenzschicht bedeutet, beschreibt die vorstehende Rechnung in Verbindung mit der Koordinatentransformation gemäss Gl. (8) die viskose Strömung längs Keilkörpern in einer Parallelströmung; denn Gl. (52) entspricht genau dem Potentialgeschwindigkeitsansatz von Falkner und Skan für diesen Fall, der von Hartree [3] unter Vernachlässigung der Druckänderung quer zur Grenzschicht gelöst wurde. Die Funktionen f_1 (oder vielmehr die ersten Ableitungen f_1') findet man daher bereits bei Hartree für verschiedene β-Werte vertafelt, jedoch ist die dort verwendete Hartree'sche dimensionslose Veränderliche

$$\xi_H = \sqrt{\left(\frac{m+1}{2}\right)}\sqrt{\left(\frac{u_1}{\nu}\right)}\, y x^{(m-1)/2}$$

hier durch ξ nach Gl. (29) zu ersetzen. Nur für kleine y-Werte sind ξ_H und ξ identisch.

Somit bedeutet $\pi\beta$ den Keilwinkel. Dabei entsprechen $m = \beta = 0$ dem Fall der parallel angeströmten Platte, $m = \beta = 1$ dem Fall der Staupunktströmung, $\beta > 0$ der beschleunigten Aussenströmung und $\beta < 0$ dem Fall der verzögerten Aussenströmung.

8. LÖSUNG DER ERSTEN NÄHERUNG

Unter Anwendung der Randbedingungen gemäss Gl. (50), (38) und (39) folgt aus Gl. (34) und (36), die sich sofort ein- bzw. zweimal integrieren lassen,

$$f_1''' + f_1 f_1'' - \beta(f_1'^2 - 1) = 0 \tag{53}$$

mit $f_1'''(\infty) + f_1(\infty) f_1''(\infty) = 0$ sowie

$$g_1 = \int_0^\xi \exp\left(-Pr \int_0^\xi f_1\, d\xi\right) d\xi \Big/ \int_0^\infty \exp\left(-Pr \int_0^\infty f_1\, d\xi\right) d\xi. \tag{54}$$

Von diesen beiden Beziehungen hat Hartree [3] Gl. (53) im Bereich $\beta = -0{,}1988$ bis $2{,}4$ mittels eines mechanischen Integrators numerisch gelöst und dabei angenommen, im Bereich $\beta < 0$ möge $f_1'(\infty)$ von unten her bei dem höchstmöglichen Wert von $f_1''(0)$ so schnell wie möglich gegen eins gehen. Die so festgelegten Werte von $f_1''(0)$ entsprechen der fehlenden vierten Randbedingung und wurden von Hartree ebenfalls vertafelt. Meksyn [5 bis 7] entwickelte ein leistungsfähiges Näherungsverfahren, nach dem man $f_1''(0)$ analytisch in wenigen sukzessiven Schritten erhalten kann.

Andererseits entspricht g_1 nach Gl. (54) genau der von Pohlhausen [8] für $\beta = 0$ gefundenen exakten Lösung. Die erste Näherung des Temperaturfeldes lautet somit

$$\bar{\vartheta} = 1 - g_1; \tag{55}$$

sie wurde von Eckert [4] für einige β-Werte vertafelt.

9. ZWEITE NÄHERUNG FÜR DAS STRÖMUNGSFELD

Ersetzt man in Gl. (29) und (32) die Grössen ξ und σ durch die für kleine Wandabstände gültigen Ausdrücke gemäss Gl. (19a), so folgt

$$\xi \to \sqrt{\left(\frac{m+1}{2}\right)}\sqrt{\left(\frac{u_1}{\nu}\right)}\, y x^{(m-1)/2}, \quad \nu^{1/2}\psi_1 \to \sqrt{\left(\frac{2}{m+1}\right)}\sqrt{(u_1 \nu)}\, x^{(m+1)/2} f_1(\xi). \tag{56}$$

Diese beiden Ausdrücke sind identisch mit den von Hartree [3] für den dimensionslosen Wandabstand und die Stromfunktion verwendeten Ansätzen. Demzufolge führt Gl. (19a) die vorstehend hergeleiteten ersten Näherungen in die bereits bekannten Lösungen [3, 4] für dünne Grenzschichten über, da diese ersten Näherungen noch keine Glieder der vollständigen Bewegungsgleichung enthalten, die in der Prandtl'schen Grenzschichtgleichung vernachlässigt worden sind. Diese Glieder treten jedoch in der zweiten Näherung auf.

Durch Anwenden von Gl. (34) und (53) auf die rechte Seite von Gl. (35) geht diese unter Verminderung der Ordnung um 2 in den Ausdruck

$$2(\beta - 1)\{-\xi^2 f_1' f_1'' + \xi[f_1 f_1'' - 2\beta(f_1'^2 - 1)] - 2\beta f_1''\}$$

über. Die einmalige Integration von Gl. (35) liefert nun

$$\left.\begin{aligned} f_2''' + f_1 f_2'' - 2(\beta - 1) f_1' f_2' - f_1'' f_2 = 2(\beta - 1)\ \{&\tfrac{1}{2}\xi^2(2\beta - f_1'^2) + \xi f_1 f_1' \\ &- (\tfrac{1}{2} f_1^2 + 2\beta f_1') - 2\beta \textstyle\int_0^\xi \xi f_1'^2\,d\xi\} + c_2 \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

mit c_2 als einer Integrationskonstante, die wegen

$$f_1(0) = f_1'(0) = f_2(0) = f_2'(0) = 0$$

den Ausdruck

$$c_2 = f_2'''(0) \tag{58}$$

darstellt. Führt man in Gl. (57)

$$f_1'(\infty) = 1, \quad f_1(\infty) = \xi + c_1, \quad 2\beta \int_0^\infty \xi f_1'^2\,d\xi = 2\beta \int_0^\infty \xi\,d\xi + c_3$$

mit c_3 als einer Konstante ein, so wird das asymptotische Verhalten von f_2 für $\xi \to \infty$ durch

$$f_2''' + (\xi + c_1) f_2'' - 2(\beta - 1) f_2' = -(\beta - 1)(c_1^2 + 4\beta) + c_2 - c_3 \tag{59}$$

wiedergegeben. Setzt man

$$f_2'''(0) = c_2 = (\beta - 1)(c_1^2 + 4\beta) + c_3, \tag{60}$$

so erhält Gl. (59) die einfache Form

$$f_2''' + (\xi + c_1) f_2'' - 2(\beta - 1) f_2' = 0. \tag{61}$$

Mit c_2 nach Gl. (60) und den hier als bekannt vorauszusetzenden ersten Näherungen f_1 ist die rechte Seite von Gl. (57) vollständig bestimmt. Bezeichnet man diese als $F(\xi, \beta)$, so lautet die Differentialgleichung für die zweite Näherung der Stromfunktion

$$f_2''' + f_1 f_2'' - 2(\beta - 1) f_1' f_2' - f_1'' f_2 = F(\xi, \beta). \tag{62}$$

Ihre Lösung nimmt man, wie bereits erwähnt wurde, am besten mittels Relaxationsverfahren oder mittels Rechenmaschinen numerisch vor. Bei der numerischen Auswertung kann u.U. auch das von Zurmühl [9] für Differentialgleichungen dritter Ordnung angegebene Verfahren gute Dienste leisten. Für bestimmte Untersuchungen am Innenrand der Grenzschicht sind die später in Anhang 1 und 2 angegebenen Reihenentwicklungen nützlich.

Die Hauptschwierigkeit bei der Lösung des Problems besteht darin, die zweiten Ableitungen $f_2''(0)$ für den Innenrand der Grenzschicht zu finden. Eine besondere Eigenschaft der Funktion f_2, die diese Aufgabe erleichtern mag, wird später in Anhang 3 erörtert.

10. DRUCKVERTEILUNG

Während nach der Grenzschichttheorie der Druck p durch

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \tag{63}$$

angenähert wird, führt eine unmittelbare Transformation der vollständigen Bewegungsgleichung

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \nu\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right), \\ \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \nu\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

in das σ, τ-Koordinatensystem zu

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \sigma} &= M^{*2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} - \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma\partial\tau} + \nu\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial\tau^3} + \frac{\partial^3\psi}{\partial\sigma^2\partial\tau}\right)\right], \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \tau} &= M^{*2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma\partial\tau} - \nu\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial\sigma^3} + \frac{\partial^3\psi}{\partial\sigma\partial\tau^2}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

mit der Abkürzung M^* gemäss

$$M^{*2} = \frac{1}{(2-\beta)^2}(\sigma^2 + \tau^2)^{\beta-1} \ . \tag{66}$$

Mit den Ableitungen nach Gl. (40) und weiteren in ähnlicher Weise gewonnenen Ableitungen ergibt sich für die Änderung dp des statischen Drucks der Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\mathrm{d}p = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial\sigma}\mathrm{d}\sigma + \frac{\partial p}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau\right) = &\left\{(\sigma^2+\tau^2)^{\beta-1}\left[u_1^2\sigma(f_1''' + f_1f_1'' - f_1'^2)\right.\right. \\ &+ \frac{u_1\nu}{(2-\beta)\sigma}(f_2''' + f_1f_2'' - f_2f_1'') + \left.\left.\frac{\nu^2}{(2-\beta)^2\sigma^3}(2f_2' + f_2'^2 - f_2f_2'')\right]\right\}\mathrm{d}\sigma \\ &- \left\{(\sigma^2+\tau^2)^{\beta-1}\left[\frac{u_1\nu}{2-\beta}(f_1'' + f_1f_1') - \frac{\nu^2}{(2-\beta)^2\sigma^2}(f_2'' + 3f_1'f_2 + f_1f_2')\right.\right. \\ &+ \left.\left.\frac{\nu^3}{(2-\beta)^3u_1\sigma^4}(6f_2 - f_2f_2')\right]\right\}\mathrm{d}\xi\,. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Unter Verwendung der Potentialgeschwindigkeit U nach Gl. (49) seien die Reynoldszahlen

$$Re_x = \frac{Ux}{\nu}, \; Re_\sigma = \frac{u_1\sigma^2}{\nu} = \frac{U\sigma^{2-\beta}}{\nu} = \Omega\, Re_x \tag{68}$$

mit der Abkürzung

$$\Omega = \frac{1}{x}\sigma^{2-\beta} = \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)}\;\left\{\cos\left[\frac{1}{2-\beta}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]\right\}^{2-\beta} \tag{69}$$

gebildet, für die an der Wand $\Omega(0) = 1$ gilt. Nach dem Einführen von Re_σ in Gl. (67) folgt unter Beachtung von Gl. (53), (62) und

$$(\sigma^2 + \tau^2)^{\beta-1} = \left[1 + \frac{\xi^2}{(2-\beta)Re_\sigma}\right]^{\beta-1} \sigma^{2(\beta-1)} \tag{70}$$

mit p_0 als dem ungestörten Druck im Freistrom

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}(p - p_0) = &\int_0^\sigma \frac{U^2}{2Re_\sigma}\left[1 + \frac{\xi^2}{(2-\beta)Re_\sigma}\right]^{\beta-1}\left\{(\beta-1)f_1'^2 - \beta \right. \\ &\left. + \frac{1}{(2-\beta)Re_\sigma}[2(\beta-1)f_1'f_2' + F(\xi,\beta)] + \frac{1}{(2-\beta)^2 Re_\sigma^2}(f_2'^2 + 2f_2' - f_2 f_2'')\right\} \mathrm{d}Re_\sigma \\ &- \int_0^\xi \frac{U^2}{(2-\beta)Re_\sigma}\left[1 + \frac{\xi^2}{(2-\beta)Re_\sigma}\right]^{\beta-1}\left\{f_1'' + f_1 f_1' - \frac{1}{(2-\beta)Re_\sigma}(f_2'' + 3f_1'f_2 + f_1 f_2') \right. \\ &\left. + \frac{1}{(2-\beta)^2 Re_\sigma^2}(6f_2 - f_2 f_2')\right\} \mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{71}$$

Aus Gl. (67) bzw. (71) kann der Druckbeiwert $(p - p_0)/\frac{1}{2}\rho U^2$ berechnet werden. Für nicht zu kleine Reynoldszahlen lässt sich Gl. (71) noch erheblich vereinfachen, indem man die Glieder höherer Ordnung von Re_σ fortlässt.

11. GESCHWINDIGKEITSVERTEILUNG UND SCHUBSPANNUNG

Für die Geschwindigkeitskomponenten u und v parallel und normal zur Keiloberfläche sowie für die Schubspannung s stehen die folgenden Gleichungen zur Verfügung:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x}, \tag{72}$$

$$s = \eta\frac{\partial u}{\partial y} = \eta\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma\partial\tau}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma}{\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{73}$$

Nach dem Einführen der Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} &= \sqrt{[(2-\beta)u_1\nu]}\left[f_1 - \frac{\nu}{(2-\beta)u_1\sigma^2}f_2\right], \\ \frac{\partial\psi}{\partial\tau} &= (2-\beta)u_1\sigma\left[f_1' + \frac{\nu}{(2-\beta)u_1\sigma^2}f_2'\right], \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma\partial\tau} &= (2-\beta)u_1\left[f_1' - \frac{\nu}{(2-\beta)u_1\sigma^2}f_2'\right], \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2} &= \frac{2}{(2-\beta)^{1/2}}\frac{\nu^{3/2}}{u_1^{1/2}\sigma^3}f_2, \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} &= (2-\beta)^{3/2}u_1\sqrt{\left(\frac{u_1\sigma^2}{\nu}\right)}\left[f_1'' + \frac{\nu}{(2-\beta)u_1\sigma^2}f_2''\right] \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

liefern Gl. (72) und (73) die Bestimmungsgleichungen für u, v und s. Diese lauten für u und v unter Beachtung von Gl. (12), (15), (68) und (70)

$$\left.\begin{aligned}\frac{u}{U} = \left[1 + \frac{\xi^2}{(2-\beta)Re_\sigma}\right]^{(\beta-1)/2} \Bigg\{ \left[f_1' + \frac{1}{(2-\beta)Re_\sigma} f_2'\right] \cos\left[(1-\beta)\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\sqrt{[(2-\beta)Re_\sigma]}}\right)\right] \\ + \frac{1}{\sqrt{[(2-\beta)Re_\sigma]}} \left[f_1 - \frac{1}{(2-\beta)Re_\sigma} f_2\right] \sin\left[(1-\beta)\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\sqrt{[(2-\beta)Re_\sigma]}}\right)\right]\Bigg\},\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{v}{U} = \left[1 + \frac{\xi^2}{(2-\beta)Re_\sigma}\right]^{(\beta-1)/2} \Bigg\{ \left[f_1' + \frac{1}{(2-\beta)Re_\sigma} f_2'\right] \sin\left[(1-\beta)\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\sqrt{[(2-\beta)Re_\sigma]}}\right)\right] \\ - \frac{1}{\sqrt{[(2-\beta)Re_\sigma]}} \left[f_1 - \frac{1}{(2-\beta)Re_\sigma} f_2\right] \cos\left[(1-\beta)\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\sqrt{[(2-\beta)Re_\sigma]}}\right)\right]\Bigg\}.\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Da die Schubspannung an der Wand ($y = 0$, $\tau = 0$) von grösster Bedeutung ist, sei hier nur dieser Wert $s(0)$ von s angegeben. Mit $(\partial\sigma/\partial y)_{\tau=0} = 0$ nach Gl. (15) folgt für $\tau = 0$ sofort aus Gl. (73)

$$s(0) = \eta \left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2\right]_{\tau=0} \tag{77}$$

und somit

$$\frac{s(0)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2}{\sqrt{[(2-\beta)Re_x]}}\left[f_1''(0) + \frac{1}{(2-\beta)Re_x} f_2''(0)\right]. \tag{78}$$

Gegenüber der aus der ersten Näherung berechneten Wandschubspannung $s_1(0)$ bringt also die zweite Näherung eine relative Änderung um

$$\frac{s(0) - s_1(0)}{s_1(0)} = \frac{1}{(2-\beta)Re_x}\frac{f_2''(0)}{f_1''(0)}. \tag{79}$$

12. DER ABLÖSUNGSPUNKT

Nach Gl. (78) ist der Ablösungspunkt durch die Bedingung

$$f_1''(0) + \frac{1}{(2-\beta)Re_x} f_2''(0) = 0 \tag{80}$$

festgelegt. Er hängt also entgegen den aus der Grenzschichtgleichung gewonnenen Ergebnissen von Keilwinkel und von der Reynoldszahl ab. Hartree [3] fand, dass sich das Ablösungsprofil an einem Keil mit dem Keilwinkel entsprechend

$$\beta_A = -0{,}1988 \tag{81}$$

einstellt, bei dem $f_1''(0) = 0$ wird. Gemäss Gl. (80) findet jedoch am Keil mit $\beta = -0{,}1988$ Ablösung nur bei unendlich grosser Reynoldszahl statt, wenn nicht $f_2''(0)$ beim gleichen Wert vom β verschwindet. Wäre z.B. $f_2''(0)$ bei $\beta = -0{,}1988$ noch positiv, so fände bei endlichen Werten von Re_x keine Strömungsumkehr statt, d.h. an diesem Keil träte noch immer Reibung auf. In einem bestimmten Bereich $\beta < -0{,}1988$ gehörte dann zu jeder Reynoldszahl ein bestimmter Keilwinkel, bei dem sich das Ablösungsprofil einstellt. Für die in [4] angedeuteten Anwendungen besteht eine der Hauptaufgaben der numerischen Auswertung darin, die Zuordnung von β und Re_x für den Ablösungspunkt zu finden.

Nimmt β allmählich von $\beta = 1$ (Staupunkt) über $\beta = 0$ (parallel angeströmte Platte) bis $\beta = -0{,}1988$ ab, so verhält sich die Funktion f_1 in diesem gesamten Bereich von β regulär; der

Wert $\beta = -0{,}1988$ entspricht jedoch einem singulären Punkt. Beim Vordringen nach Werten $\beta < -0{,}1988$ treten daher u.U. Schwierigkeiten auf. Da das bereits erwähnte Verfahren von Meksyn [5 bis 7] als Hilfsmittel zur Erforschung dieses unbekannten Bereichs von f_1 dienen kann, sei es in seinen Grundzügen kurz wiedergegeben. Nach der in Anhang 1 angegebenen Reihenentwicklung lässt sich Gl. (53) nahe der Wand durch

$$f_1 = \tfrac{1}{2} f_1''(0)\xi^2 - \tfrac{1}{6}\beta\xi^3 \pm \cdots \tag{82}$$

befriedigen. Schreibt man Gl. (53) in der Form

$$f_1''' + f_1' f_1'' = \beta(f_1'^2 - 1), \tag{83}$$

so lautet mit Gl. (82) die homogene Differentialgleichung

$$f_1''' + [\tfrac{1}{2} f_1''(0)\xi^2 - \tfrac{1}{6}\beta\xi^3 \pm \cdots] f_1'' = 0. \tag{84}$$

Mit der Abkürzung $G(\xi) = \frac{1}{6} f_1''(0)\xi^3 - \frac{1}{24}\beta\xi^4 \pm \cdots$ liefert die Integration

$$f_1'' = f_1''(0) \exp[-G(\xi)]. \tag{85}$$

Für die inhomogene Beziehung gemäss Gl. (83) sei daher

$$f_1'' = H(\xi) \exp[-G(\xi)] \tag{86}$$

mit $H(\xi)$ als einer Funktion von ξ angesetzt. Wegen $f_1'''(0) = -\beta$ und somit $f_1'' \to f_1''(0) - \beta\xi$ für kleine ξ-Werte folgt

$$f_1'' = [f_1''(0) - \beta\xi] \exp[-G(\xi)]. \tag{87}$$

Für den hier zu untersuchenden Bereich der verzögerten Strömung werde $-|\beta|$ statt $\beta < 0$ geschrieben. Entwickelt man nun $\exp[-\frac{1}{24}|\beta|\xi^4]$ in eine Reihe, bricht diese nach dem zweiten Glied ab und vernachlässigt alle weiteren Glieder von $G(\xi)$, so entsteht

$$f_1'' = [f_1''(0) + |\beta|\xi](1 - \tfrac{1}{24}|\beta|\xi^4) \exp[-\tfrac{1}{6} f_1''(0)\xi^3]. \tag{88}$$

Nach dem Einführen dieser rohen Näherung in die von f_1 zu erfüllende Bedingung

$$\int_0^\infty f_1'' \mathrm{d}\xi = 1 \tag{89}$$

folgt

$$\int_0^\infty [f_1''(0) + |\beta|\xi - \tfrac{1}{24}|\beta| f_1''(0)\xi^4 - \tfrac{1}{24}\beta^2\xi^5] \exp[-\tfrac{1}{6} f_1''(0)\xi^3] \mathrm{d}\xi = 1 \tag{90}$$

und integriert

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2}{6^{2/3}} f_1''(0)^{2/3}\,\Gamma(\tfrac{1}{3}) + \frac{2}{6^{1/3}}|\beta| f_1''(0)^{-2/3}\,\Gamma(\tfrac{2}{3}) \\ &- \frac{6^{2/3}}{12}|\beta| f_1''(0)^{-2/3}\,\Gamma(\tfrac{5}{3}) - \tfrac{1}{2}\beta^2 f_1''(0)^{-2}\,\Gamma(2) = 1 \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

mit Γ als der Eulerfunktion. Mit der Abkürzung $\Lambda = f_1''(0)^2$ liefert Gl. (91)

$$1{,}622\Lambda^{1/3} + 1{,}241|\beta|\Lambda^{-1/3} - 0{,}5\beta^2\Lambda^{-1} = 1 \tag{92}$$

als eine Näherungsgleichung zum Bestimmen von $f_1''(0)$. Für $\beta = 0$ z.B. erhält man aus Gl. (92) sofort $f_1''(0) = 0{,}484$, während die genaue Rechnung von Hartree $f_1''(0) = 0{,}4696$ ergab. Durch Hinzunahme weiterer Glieder von $G(\xi)$ lässt sich das Verfahren noch verfeinern; der Rechenaufwand nimmt jedoch erheblich zu.

13. ZWEITE NÄHERUNG FÜR DAS TEMPERATURFELD

Schreibt man Gl. (37) in der Form

$$g_2'' + (Pr\, f_1)g_2' + Pr(2f_1'g_2 - f_2g_1') = 0, \tag{93}$$

so erschliesst sich, abgesehen von der mechanischen Integration, der folgende Lösungsweg. Man betrachtet die eingeklammerten Ausdrücke zeitweilig als invariant und erhält unter Beachtung der Randbedingungen gemäss Gl. (38) und (39) die formale Lösung

$$g_2 = Pr\int_0^\xi \exp\left(-Pr\int_0^\xi f_1\,\mathrm{d}\xi\right)\left[\int_\xi^\infty (2f_1'g_2 - f_2g_1')\exp\left(Pr\int_\xi^\infty f_1\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\xi \tag{94}$$

mit

$$g_2'(0) = Pr\int_0^\infty (2f_1'g_2 - f_2g_1')\exp\left(Pr\int_0^\infty f_1\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\xi. \tag{95}$$

Die Aufgabe besteht nun darin, bei bekannten Werten von f_1, f_2 und g_1 Werte von g_2 zu finden, für die Gl. (94) rechts und links das gleiche Ergebnis liefert. Sei z.B. $g_{20} = 0$ als eine nullte rohe Näherung von g_2 angenommen, so bildet

$$g_{21} = -Pr\int_0^\xi \exp\left(Pr\int_0^\xi f_1\,\mathrm{d}\xi\right)\left[\int_\xi^\infty f_2g_1'\exp\left(Pr\int_\xi^\infty f_1\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\xi \tag{96}$$

eine bessere erste Näherung g_{21}. Eine zweite Näherung g_{22} ergibt sich zu

$$g_{22} = Pr\int_0^\xi \exp\left(-Pr\int_0^\xi f_1\,\mathrm{d}\xi\right)\left[\int_\xi^\infty (2f_1'g_{21} - f_2g_1')\exp\left(Pr\int_\xi^\infty f_1\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\xi \tag{97}$$

usw., bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

ANHANG 1: REIHENENTWICKLUNG DER ERSTEN NAHERUNG ZUR STROMFUNKTION

Die Funktion f_1 kann in eine Reihe

$$f_1(\xi) = \frac{A_2}{2!}\xi^2 + \frac{A_3}{3!}\xi^3 + \frac{A_5}{5!}\xi^5 + \frac{A_6}{6!}\xi^6 + \cdots + \frac{A_n}{n!}\xi^n + \cdots \tag{98}$$

mit den Koeffizienten $A_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ entwickelt werden, die für kleine ξ-Werte gut konvergiert. Die Koeffizienten A_0, A_1 und A_4 verschwinden auf Grund der Randbedingungen für alle β-Werte, während andere Koeffizienten je nach dem Wert von β zu null werden können. Nachstehend sind die Koeffizienten bis A_{17} angeführt

$$\left.\begin{aligned}
A_2 &= f_1''(0),\ A_3 = -\beta,\ A_5 = (2\beta-1)A_2^2,\ A_6 = -2\beta(3\beta-2)A_2,\\
A_7 &= 2\beta^2(3\beta-2),\ A_8 = (2\beta-1)(10\beta-11)A_2^3,\ A_9 = -2\beta(66\beta^2-113\beta+45)A_2^2,\\
A_{10} &= 16\beta^2(3\beta-2)(7\beta-8)A_2,\ A_{11} = 3(2\beta-1)(100\beta^2-216\beta\\
&\quad +125)A_2^4 - 16\beta^3(3\beta-2)(7\beta-8),\\
A_{12} &= (18\beta-37)A_2A_9 - 3\beta(24\beta-31)A_8 + 42(6\beta-5)A_5A_6,\\
A_{13} &= 2(10\beta-23)A_2A_{10} - 10\beta(9\beta-13)A_9 + 12(35\beta-31)A_5A_7 + 42(6\beta-5)A_6^2,\\
A_{14} &= 2(11\beta-28)A_2A_{11} - 22\beta(5\beta-8)A_{10} + 33(20\beta-19)A_5A_8 + 132(7\beta-6)A_6A_7,\\
A_{15} &= (24\beta-67)A_2A_{12} - 4\beta(33\beta-58)A_{11} + 22(45\beta-46)A_5A_9\\
&\quad + 33(48\beta-43)A_6A_8 + 132(7\beta-6)A_7^2,\\
A_{16} &= (26\beta-79)A_2A_{13} - 13\beta(12\beta-23)A_{12} + 143(10\beta-11)A_5A_{10}\\
&\quad + 143(18\beta-17)A_6A_9 + 429(8\beta-7)A_7A_8,\\
A_{17} &= 4(7\beta-23)A_2A_{14} - 14\beta(13\beta-27)A_{13} + 182(11\beta-13)A_5A_{11}\\
&\quad + 4004(\beta-1)A_6A_{10} + 14(143\beta-388)A_7A_9 + 429(8\beta-7)A_8^2.
\end{aligned}\right\} \tag{99}$$

Die Reihenentwicklungen der in der Funktion $F(\xi, \beta)$ von Gl. (62) vorkommenden Einzelfunktionen lauten

$$\left.\begin{aligned}
f_1' &= A_2\xi + \frac{A_3}{2!}\xi^2 + \frac{A_5}{4!}\xi^4 + \cdots + \frac{A_{n+1}}{n!}\xi^n + \cdots,\\
f_1'' &= A_2 + A_3\xi + \frac{A_5}{3!}\xi^3 + \cdots + \frac{A_{n+2}}{n!}\xi^n + \cdots,\\
\int_0^\xi \xi f_1'^2\,\mathrm{d}\xi &= \frac{A_2^2}{4}\xi^4 + \frac{A_2A_3}{5}\xi^5 + \frac{A_3^2}{24}\xi^6 + \frac{2A_2A_5}{7\cdot 4!}\xi_7\\
&+ \frac{1}{8}\left(\frac{2A_2A_6}{5!} + \frac{2A_3A_5}{2!4!}\right)\xi^8 + \frac{1}{9}\left(\frac{2A_2A_7}{6!} + \frac{2A_3A_6}{2!5!}\right)\xi^9\\
&+ \frac{1}{10}\left(\frac{2A_2A_8}{7!} + \frac{2A_3A_7}{2!6!} + \frac{A_5^2}{4!4!}\right)\xi^{10} + \frac{1}{11}\left(\frac{2A_2A_9}{8!} + \frac{2A_3A_8}{2!7!} + \frac{2A_5A_6}{4!5!}\right)\xi^{11}\\
&+ \frac{1}{12}\left(\frac{2A_2A_{10}}{9!} + \frac{2A_3A_9}{2!8!} + \frac{2A_5A_7}{4!6!} + \frac{A_6^2}{5!5!}\right)\xi^{12}\\
&+ \frac{1}{13}\left(\frac{2A_2A_{11}}{10!} + \frac{2A_3A_{10}}{2!9!} + \frac{2A_5A_8}{4!7!} + \frac{2A_6A_7}{5!6!}\right)\xi^{13}\\
&+ \frac{1}{14}\left(\frac{2A_2A_{12}}{11!} + \frac{2A_3A_{11}}{2!10!} + \frac{2A_5A_9}{4!8!} + \frac{2A_6A_8}{5!7!} + \frac{A_7^2}{6!6!}\right)\xi^{14}\\
&+ \frac{1}{15}\left(\frac{2A_2A_{13}}{12!} + \frac{2A_3A_{12}}{2!11!} + \frac{2A_5A_{10}}{4!9!} + \frac{2A_6A_9}{5!8!} + \frac{2A_7A_8}{6!7!}\right)\xi^{15}\\
&+ \frac{1}{16}\left(\frac{2A_2A_{14}}{13!} + \frac{2A_3A_{13}}{2!12!} + \frac{2A_5A_{11}}{4!10!} + \frac{2A_6A_{10}}{5!9!} + \frac{2A_7A_9}{6!8!} + \frac{A_8^2}{7!7!}\right)\xi^{16}\\
&+ \frac{1}{17}\left(\frac{2A_2A_{15}}{14!} + \frac{2A_3A_{14}}{2!13!} + \frac{2A_5A_{12}}{4!11!} + \frac{2A_6A_{11}}{5!10!} + \frac{2A_7A_{10}}{6!9!} + \frac{2A_8A_9}{7!8!}\right)\xi^{17} + \cdots.
\end{aligned}\right\} \quad (100)$$

Alle diese Reihen konvergieren im Bereich $\xi > 2$ sehr langsam. Insbesondere gilt für den der ersten Näherung zugeordneten Ablösungspunkt

$$\left.\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{\beta}{3!}\xi^3 + \frac{2}{7!}\beta^2(3\beta-2)\xi^7 - \frac{16}{11!}\beta^3(3\beta-2)(7\beta-8)\xi^{11}\\
&+ \frac{16}{15!}\beta^4(3\beta-2)\,[33(7\beta-6)(3\beta-2) + 4(33\beta-58)(7\beta-8)]\,\xi^{15} \mp \cdots
\end{aligned}\right\} \quad (101)$$

und

$$\int_0^\xi \xi f_1'^2\,\mathrm{d}\xi = \frac{\beta^2}{24}\xi^6 - \frac{\beta^3}{3600}(3\beta-2)\xi^{10} + \frac{2}{7}\beta^4(3\beta-2)\left[\frac{4(7\beta-8)}{10!} + \frac{3\beta-2}{6!6!}\right]\xi^{14} \mp \cdots \quad (102)$$

mit $\beta = -0{,}1988$, für die ebene, parallel angeströmte Platte ($\beta = 0$, $A_2 = 0{,}4696$)

$$f_1 = \frac{A_2}{2!}\xi^2 - \frac{A_2^2}{5!}\xi^5 + \frac{11A_2^3}{8!}\xi^8 - \frac{375A_2^4}{11!}\xi^{11} + \frac{27\,897A_2^5}{14!}\xi^{14} - \frac{3\,817\,137A_2^6}{17!}\xi^{17} \pm \cdots \quad (103)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\xi \xi f_1'^2\,\mathrm{d}\xi &= \frac{A_2^2}{4}\xi^4 - \frac{2A_2^3}{7\cdot 4!}\xi^7 + \frac{A_2^4}{10}\left(\frac{22}{7!}+\frac{1}{4!4!}\right)\xi^{10}\\ &- \frac{2A_2^5}{13}\left(\frac{375}{10!}+\frac{11}{4!7!}\right)\xi^{13} + \frac{A_2^6}{16}\left(\frac{55\,794}{13!}+\frac{750}{4!10!}+\frac{121}{7!7!}\right)\xi^{16} \mp \cdots\end{aligned}\right\}\tag{104}$$

sowie für die Staupunktströmung ($\beta = 1$, $A_2 = 1{,}2326$)

$$\left.\begin{aligned}f_1 &= \frac{A_2}{2!}\xi^2 - \frac{1}{3!}\xi^3 + \frac{A_2^2}{5!}\xi^5 - \frac{2A_2}{6!}\xi^6 + \frac{2}{7!}\xi^7 - \frac{A_2^3}{8!}\xi^8\\ &+ \frac{4A_2^2}{9!}\xi^9 - \frac{16A_2^2}{10!}\xi^{10} + \frac{1}{11!}(27A_2^4 + 16)\xi^{11} - \frac{181A_2^3}{12!}\xi^{12}\\ &+ \frac{840A_2^2}{13!}\xi^{13} - \frac{1}{14!}(33A_2^5 + 918A_2^4 + 2128A_2)\,\xi^{14}\\ &+ \frac{1}{15!}(10\,725A_2^4 + 2128)\,\xi^{15} - \frac{74\,693A_2^3}{16!}\xi^{16}\\ &+ \frac{1}{17!}(-\,7287A_2^6 + 58\,752A_2^5 + 266\,568A_2^2)\,\xi^{17} \mp \cdots.\end{aligned}\right\}\tag{105}$$

Aus Gl. (57) und (62) geht sofort hervor, dass im Falle $\beta = 1$ die Funktion $F(\xi, \beta)$ verschwinden muss.

ANHANG 2: REIHENENTWICKLUNG DER ZWEITEN NÄHERUNG ZUR STROMFUNKTION

Führt man die in Anhang 1 verzeichneten Reihen für f_1 in Gl. (57) ein, so ergibt sich für die zweite Näherung die Reihe

$$f_2 = \frac{B_2}{2!}\xi^2 + \frac{B_3}{3!}\xi^3 + \frac{B_4}{4!}\xi^4 + \cdots + \frac{B_n}{n!}\xi^n + \cdots \tag{106}$$

mit den Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned}&B_2 = f_2''(0),\; B_3 = f_2'''(0) = c_2 = (\beta - 1)(c_1^2 + 4\beta) + c_3,\\ &B_4 = 4\beta(1-\beta)A_2,\; B_5 = -\,4(1-\beta)[A_2B_2 + \beta(1+\beta)],\\ &B_6 = -\,2[A_2c_2 + \beta B_2 + 3(1-\beta)(A_2c_2 - \beta B_2)],\\ &B_7 = -\,2(1-\beta)[A_2^2(16\beta - 20\beta^2 - 3) - 6\beta c_2], \cdots.\end{aligned}\right\}\tag{107}$$

ANHANG 3: BESONDERE EIGENSCHAFTEN DER ZWEITEN NÄHERUNGEN

Da am Staupunkt die Funktion $F(\xi, \beta)$ in Gl. (62) verschwindet, gilt für $\beta = 1$ die Differentialgleichung

$$f_2''' + f_1 f_2'' - f_1'' f_2 = 0. \tag{108}$$

Ihre Lösungen sind offensichtlich $f_2 = 0$ oder $f_2 = f_1'$ (vgl. Gl. (34) für $m = 1$). Da aber $f_2 = f_1'$ die Randbedingungen bei $\xi = \infty$ nicht erfüllen kann, muss $f_2 = 0$ zutreffen. Dies bedeutet, dass die aus der Grenzschichtgleichung erhaltene erste Näherung f_1 im Falle der Staupunktströmung gleichzeitig die exakte Lösung der vollständigen Bewegungsgleichung ohne irgend welche Vernachlässigungen darstellt. In ähnlicher Weise liefern Gl. (96) und (97) mit $f_2 = 0$ sofort $g_{20} = g_{21} = g_{22} = \cdots = g_2 = 0$, d.h. auch das Temperaturfeld wird durch g_1 bereits exakt beschrieben.

Aus Gl. (108) geht ferner hervor, dass der homogene Teil von Gl. (57) formal durch $f_2 = f_1'$ befriedigt wird. Die Lösung der inhomogenen Gleichung erhält somit die Form

$$f_2(\xi) = k(\xi) f_1'(\xi) \tag{109}$$

mit k als einer Funktion von ξ und $k = 0$ für $\beta = 1$. Aus Gl. (109) folgt

$$\left.\begin{aligned} f_2' &= k f_1'' + k' f_1', \\ f_2'' &= k f_1''' + 2k' f_1'' + k'' f_1', \\ f_2''' &= k f_1'''' + 3k' f_1''' + 3k'' f_1'' + k''' f_1' \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

und unter Beachtung der Randbedingungen für f_1 und f_2

$$k(0) = 0, \;\; k(\infty) = 0, \;\; k'(\infty) = 0. \tag{111}$$

Ferner gelten die Beziehungen

$$k'(0) = \frac{f_2''(0)}{2 f_1''(0)} \tag{112}$$

und

$$k''(0) = \frac{c_2 + 3\beta k'(0)}{3 f_1''(0)}, \;\; k''(\infty) = f_2''(\infty), \;\; k'''(\infty) = f_2'''(\infty), \tag{113}$$

von denen Gl. (112) besondere Bedeutung zukommt. Mit Gl. (112) liefert Gl. (80) für die Reynoldszahl am Ablösungspunkt

$$Re_x = -\frac{2}{2-\beta} k'(0). \tag{114}$$

Hieraus folgt sofort $k'(0) = 0$ für $\beta = 1$ und $k'(0) = -\infty$ für $\beta = -0{,}1988$. Gelingt es, im Bereich $\beta < -0{,}1988$ noch einige Werte von $k'(0)$ zu ermitteln, so kann man eine Näherungskurve für $k'(0)$ als Funktion von β aufzeichnen und daraus das Ablösungsverhalten bestimmen.

Mit Gl. (109) liefert Gl. (62) unter Beachtung von Gl. (34) und (53) die Differentialgleichung

$$L'' + \left(f_1 + 3\frac{f_1''}{f_1'}\right) L' + \left[(\beta + 2) f_1' - \frac{3\beta + f_1 f_1''}{f_1'}\right] L = \frac{F(\xi, \beta)}{f_1'} \tag{115}$$

mit der Abkürzung

$$L = k'(\xi) \tag{116}$$

und der Bedingung

$$L'(0) = \frac{c_2 + 3\beta L(0)}{3 f_1''(0)}$$

nach Gl. (113), die dafür sorgt, dass in Gl. (62) nahe $\xi = 0$ keine uneigentlichen Integrale auftreten. Mit Hilfe von Gl. (112) gelang es also, die Ordnung der Differentialgleichung um eins zu reduzieren. Bei der numerischen oder der mechanischen Integration hat man noch zu entscheiden, ob Gl. (62) oder Gl. (115) geeigneter ist.

LITERATUR

1. H. L. ALDEN, Second approximation to the laminar boundary layer flow over a flat plate. *J. Math. Phys.* **27**, 91–104 (1948).
2. H. BLASIUS, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. *Z. Math. Phys.* **56**, 1–37 (1908).
3. D. R. HARTREE, On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **33**, 223–39 (1937).
4. E. ECKERT, Die Berechnung des Wärmeübergangs in der laminaren Grenzschicht umströmter Körper. *Forschungsh, Ver. Dtsch. Ing.* Heft 416, Berlin (1942).
5. D. MEKSYN, The laminar boundary-layer equations—I. Motion of an elliptic and circular cylinders. *Proc. Roy. Soc.* A **192**, 545–67 (1948).
6. D. MEKSYN, The laminar boundary-layer equations—II. Integration of non-linear ordinary differential equations. *Proc. Roy. Soc.* A **192**, 567–75 (1948).
7. D. MEKSYN, Integration of the boundary-layer equations for a plane in a compressible fluid. *Proc. Roy. Soc.* A **195**, 180–88 (1948).
8. E. POHLHAUSEN, Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung. *Z. Angew. Math. Mech.* **1**, 115–21 (1921).
9. R. ZURMÜHL, Zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung. *Z. Angew. Math. Mech.* **20**, 104–16 (1940).

Abstract—The exact solution of the complete equation of motion and of the complete energy equation for the laminar flow along two-dimensional wedges can be performed by means of a suitable transformation of the co-ordinates and of introduction of series expansions for the stream function and the excess temperature ratio. Total differential equations result for the various terms of the series expansions. The first terms (first approximation) are already known as the exact solutions of the so-called boundary layer equations while the differential equations for the second terms (second approximation) may be evaluated best by using electronic computers. As a partial result it may be mentioned that the separation profile does not only depend on the wedge angle but also on Reynolds number.

Résumé—Dans le cas d'un écoulement laminaire le long d'un dièdre bi-dimensionnel la solution exacte de l'équation complète du mouvement et de l'équation complète de l'énergie peut être améliorée au moyen d'un changement convenable de coordonnées et l'introduction de développements en série pour la fonction de courant et le rapport de température. Les équations différentielles résultent des différents termes des développements en série. Les premiers termes (1ère approximation) sont déjà connus comme étant les solutions exactes des équations dites de la couche limite, tandis que les équations différentielles correspondant aux second termes (2ème approximation) peuvent être mieux déterminées à l'aide de calculateurs électroniques. Un résultat partiel peut être mentionné: le profil de décollement ne dépend pas uniquement de l'angle des dièdres mais également du nombre de Reynolds.

Аннотация—Показано, что точное решение полных уравнений движения и энергии для ламинарного течения вдоль двумерных клиньев может быть проведено с помощью соответствующего преобразования координат с использованием способа разложения в ряды для функции тока и избыточной температуры. В результате из полных дифференциальных уравнений получаются уравнения для различных членов ряда. Первые члены (первое приближение) являются известными точными решениями для так называемых уравнений пограничного слоя. Дифференциальные уравнения для вторых членов (второе приближение) могут быть лучше всего вычислены на электронных счётно-решающих устройствах. Как частный результат можно отметить, что профиль скорости в области отрыва потока оказывается независящим как от угла клина, так и от числа Рейнольдса.